ТЕМА ІІ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

ЗМІСТ

§ 1. ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ.

1.У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитись розглядом лише дійсних чисел. Вже досить давно під час розв'язування різних задач виникла потреба добувати квадратний корінь з від'ємних чисел. Але чисел, які піднесені до квадрату дають від'ємні числа, тоді не знали і тому вважали, що квадратні корені з від'ємних чисел не існують, тобто задачі, які до них приводять, не мають розв'язків. Зокрема, так було під час розв'язування квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом, наприклад:

$$x^2 - 4x + 10 = 0 \qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-6}.$$

тому природно постало питання про розширення множини дійсних чисел, приєднанням до неї нових так, щоб у розширеній множині крім чотирьох арифметичних дій – додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на нуль), можна було виконувати дію добування кореня. Це питання було успішно розв'язано лише у XIX сторіччі. Відповідно до прийнятих в математиці принципів розширення поняття числа при розширенні множини дійсних чисел мають задовольнятися такі вимоги:

1) означення нових чисел мусить спиратися на поняття дійсного числа, і нова множина має містити всі дійсні числа;

2) для нових чисел повинні виконуватись п'ять законів прямих арифметичних чисел (пригадайте ці закони);

3) у новій числовій множині мусить мати розв'язок рівняння $x^2=-1$.

Оскільки існує вимога, щоб у новій числовій множині рівняння $x^2=-1$ мало розв'язок, необхідно внести деяке нове число, вважаючи його розв'язком цього рівняння. Число, квадрат якого дорівнює –1, позначають буквою і і називають уявною одиницею (і – перша буква латинського слова imaginarius – уявний). Підкреслимо, що рівність $i^2=-1$ приймається за означенням і не доводиться. До нової множини мають належати числа

виду bί (добуток дійсного числа на уявну одиницю) і числа виду а + bί (сума дійсного числа *а* та добуток дійсного числа *b* на уявну одиницю).

Отже, нова множина чисел повинна містити всі числа виду a + bί.

<u>Означення.</u> *Числа виду a + bί, де a і b – довільні дійсні числа, а ί – уявна одиниця називають комплексними.*

Слово "комплексний" означає складений. Число a називають дійсною частиною числа a + bί , а вираз bί – уявною.

Число *b* називають коефіцієнтом при уявній частині.

Наприклад, у числі 6 + 7ί дійсна частина 6, уявна 7. Коефіцієнт при уявній частині дорівнює 7. Дійсною частиною числа 0 + 3ί є число нуль, а уявною – вираз 3ί; коефіцієнт при уявній частині дорівнює 3. Числа виду а + 0ί ототожнюються з дійсними числами, а саме вважають, що а + 0ί=а. Таким чином виконується обов'язкова для будь – якого розширення поняття числа вимога, щоб попередній числовий "запас" входив до нової числової множини як її частина. Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел. Відповідно до вимог, що ставляться при будь – якому розширення поняття числа, при побудові множини комплексних чисел треба ввести за означенням умову рівності цих чисел і правила виконання прямих дій – додавання і множення.

Два комплексних числа a + bί і c + dί рівні між собою тоді і тільки тоді, коли a = c і b=d, тобто коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах.

Поняття "більше" і "менше" для комплексних чисел не має смислу. Ці числа за величиною не порівнюють. Тому не можна, наприклад, сказати, яке з двох комплексних чисел більше 10ί чи 3ί, 2+5ί чи 5+2ί.

Важливим є поняття про спряжені комплексні числа. Числа a + bί і a - bί, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявних частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають спряженими. Можна сказати простіше: числа a + bί і a - bί, які відрізняються лише знаком уявної частини, називають спряженими.

Наприклад, спряженими є комплексні числа 4+3í та 4-3í; 2-í та 2+í; -8+7í та –8-7í; -5-í та –5+í. Якщо дане число 6í, то спряженим до нього є –6í. До числа 11 спряженим буде 11, бо 11+0í=11-0í.

§ 2. АЛГЕБРАЇЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ЗАДАНИМИ В АЛГЕБРАЇЧНІЙ ФОРМІ.

Запис числа z у вигляді a + bí називається *алгебраїчною формою* запису комплексного числа.

а) додавання комплексних чисел.

Означення: сумою двох комплексних чисел a + bí і c + dí називається комплексне число (a + c) + (b + d)í, дійсна частина якого і коефіцієнт при уявній частині дорівнюють відповідно сумі дійсних частин і коефіцієнтів при явних частинах додатків, тобто (a + bí) + (c + dí) = (a + c) + (b + d)í.

Приклади. Виконати додавання комплексних чисел:

1) (3+2í) + (-1-5í) = (3-1) + (2-5)í = 2-3í
2) (4-5í) + (2-í) = (4+2) + (-5-1)í = 6-6í
3) (2+3í) + (6-3í) = (2+6) + (3-3)í= 8
4) (10 – 3í) + (-10+3í) = (10-10) + (-3+3)í = 0

З наведених прикладів випливає, що додавання комплексних чисел ми виконуємо за правилом додавання многочленів. У множині дійсних чисел справедлива рівність a + 0 = a. У множині комплексних чисел нулем є число 0 + 0í. Справді, яке б не було число , справедлива рівність

(a + bí) + (0+0í) = (a +0) + (b +0)í = a + bí

За аналогією з дійсними числами, для комплексних чисел вводиться поняття про протилежні числа: два числа a + bí та -a - bí, сума яких дорівнює 0, називають *протилежними*.

Додавання комплексних чисел підлягає переставному та сполучному законам.

Доведемо, наприклад, справедливість переставного закону додавання комплексних чисел. Нехай, z_1 = a + bí, z_2= c + dí. Тоді z_1+ z_2 = (a + bí) + (c + dí) = (a + c) + (b+d)í , z_2+ z_1 = (c + dí) + (a + bí) = (c + a) + (d+b)í. Оскільки для додавання дійсних чисел справджується переставний закон, тобто a + c = c + a; b+d = d+b, тобто (a + c) + (b+d)í = (c + a) + (d+b)í , то z_1 + z_2 = z_2+ z_1, що й треба було довести. Означення суми комплексних чисел поширюється і на випадок трьох і більше доданків.

б) віднімання комплексних чисел.

Віднімання комплексних чисел означають як дію, обернену до додавання, коли за даною сумою й одним з доданків знаходять другий, невідомий доданок.

Означення. Різницею двох комплексних чисел z_1= a + bí і z_2 = c + dí називається таке комплексне число z_3= x+yí , яке в сумі з z_2 дає z_1.

Отже, z_1- z_2= z_3, якщо z_3 + z_2= z_1. можливість дії віднімання комплексних чисел та її однозначність потребує доведення.

Доведемо, що для будь – яких комплексних чисел $z_1 = a + bí$ і $z_2 = c + dí$ різниця $z_1 - z_2$ визначена і до того ж однозначно. Доведемо, що існує, і до того ж єдине, комплексне число $z_3 = x+yí$, яке в сумі з z_2 дає z_1.

За означенням дії віднімання, $(c + dí) + (x+yí) = a + bí$. виконавши додавання в лівій частині рівності, дістанемо:

$$(c + x) + (d + y)í = a + bí \qquad (1).$$

З умови рівності двох комплексних чисел маємо:

$$c + x = a$$
$$d + y = b$$

Ця система має розвиток, і до того ж єдиний: $x = a - c$, $y = b – d$. Отже, існує , і до того ж єдина, пара дійсних чисел (x, y), яка задовільняє рівняння (1), що і треба було довести. З доведеного випливає, що віднімання комплексних чисел виконують за таким правилом:

$$(a + bí) – (c + dí) = (a - c) + (b – d)í$$

Приклади: Виконати віднімання комплексних чисел.

1) $(3+4í) – (1+2í) = (3-1) + (4-2)í = 2 + 2í$;
2) $(-5+2í) – (2+í) = (-5-2) + (2-1)í = -7+í$;
3) $(6+7í) – (6-5í) = (6-6) + (7+5)í = 12í$;
4) $(0,3+2,5í) – (-0,75+1,5í) = (0,3+0,75í) + (2,5-1,5í) = 1,05+í$;
5) $\left(\sqrt{2}-2i\right)-\left(\sqrt{2}+3i\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\left(-2-3i\right)-5i$;
6) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{5}i\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)i=\frac{1}{12}+\frac{11}{10}i.$

в) Множення комплексних чисел.

<u>Означення</u>. Добутком двох комплексних чисел $a + bí$ і $c + dí$ називається комплексне число $(ac - bd) + (ad + bc)í$. Суть і доцільність цього означення стане зрозумілою, якщо взяти до уваги, що цей добуток утворений так, як виконується множення двочленів з дійсними коефіцієнтами, а саме $(a + bí)(c + dí) = ac + adí + bcí + bdí^2 = ac + (ad + bc)í + bdí^2$. Замінюючи, за означенням, $í^2$ на $–1$, дістанемо: $bdí^2 = -bd$. Відокремивши дійсну частину від уявної, остаточно матиме

$$(a + bí)(c + dí) = (ac - bd) + (ad + bc)í \qquad (2)$$

Формулу (2) не слід намагатися механічно запам’ятати. Під час множення комплексних чисел треба користуватись відомим правилом множення двочленів $a + bí$ і $c + dí$ з наступною заміною $í^2$ на $–1$.

Приклади: Виконати множення комплексних чисел.

1) $(4-5í)(3+2í) = 12+8í -15í -10í^2= 12+10-7í =22-7í$;
2) $\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}i\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{15}i-\sqrt{5}i^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)i$
3) $8i\cdot 3i\cdot\sqrt{3}=-24\sqrt{3}$;
4) $(2-í)(-5) = -10+5í$;
5) $(-4-3í)(-6í) = -18+24í$.

Дія множення комплексних чисел підлягає основним законам множення, встановленим для дійсних чисел: переставному і сполучному.

Знайдемо добуток двох спряжених комплексних чисел. Маємо: $(a + bí)(a - bí) = a^2 - (bí)^2 = a^2 -b^2í^2 = a^2 + b^2$, тобто $(a + bí)(a - bí) = a^2 + b^2$.

Приклади: Обчислити добуток.

1) (3+5í)(3-5í) = 9+25 = 34;

2) (2+í)(2-í) = 4+1 = 5;

3) $(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)=16+3-19$;

4) $(\sqrt{ő}+\sqrt{ół})(\sqrt{ő}-\sqrt{ół})=ő+ó$;

5) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}ł\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}ł\right)=\frac{9}{16}+\frac{4}{25}=\frac{289}{400}$.

Читаючи рівність (a + bí)(a - bí) = $a^2 + b^2$ справа наліво, робимо висновок, що суму квадратів будь – яких двох чисел можна подати у вигляді добутку комплексно – спряжених множників.

Приклади: Розкласти на множники двочлени.

1) a+9 = (a+3í)(a-3í);

2) $16m^2+25n^2$ = (4m+5ní)(4m-5ní);

3) 49+36 = (7+6í)(7-6í);

4) $ŕ+16=\left(\sqrt{ŕ}+4ł\right)\left(\sqrt{ŕ}-4ł\right)$;

5) $b+7=\left(\sqrt{b}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{7}\right)$.

г) Ділення комплексних чисел.

Ділення комплексних чисел означають як дію, обернену до дії множення, коли за даним добутком і одним з множників знаходять другий, невідомий множник. Причому в множині комплексних чисел залишається вимога, щоб дільник був відмінним від нуля.

Означення. Часткою комплексних чисел z_1 = a + bí та z_2 = c + dí називається таке комплексне число z_3= x+yí, яке при множенні на z_2 дає z_1.

Можливість ділення комплексних чисел і його однозначність потребує доведення.

Доведемо, що частка комплексних чисел z_1 = a + bí та z_2 = c + dí визначена і до того ж однозначно, якщо c + dí≠ 0+0í. Отже, доведемо, що за умови існує, і до того ж єдине, комплексне число z_3= x+yí, яке при множенні на z_2 дає z_1. За означенням дії ділення, (c + dí)(x+yí) = a + bí. Виконавши в лівій частині цієї рівності дію множення, дістанемо: (c x - dy) + (cy +d x)í = a + bí.

З умови рівності двох комплексних чисел випливає:

$$\begin{cases} cx-dy=a; \\ cy+dx=b. \end{cases}$$

Система має єдиний розв’язок:

$$x=\frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)}$$

$$y=\frac{(bc-ad)}{\left(c^2+d^2\right)}$$

Із доведення випливає, що ділення комплексних чисел відбувається за таким правилом:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Цей результат можна дістати, помноживши ділене і дільник на число, спряжене до дільника. Покажемо це:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ .$$

Цим принципом користуються під час розв'язування вправ на ділення комплексних чисел.

Приклади. Знайти частку комплексних чисел.

а) $\frac{2+5i}{3-2i}=\frac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-4+19i}{13}=-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$;

б) $\frac{3+i}{i}=\frac{(3+i)(-i)}{1}=1-3i.$

д) піднесення комплексних чисел до степеня.

За означенням, $i^1 = i$, $i^2= - 1$.

Користуючись рівністю $i^2= - 1$, визначено кілька послідовних ступенів уявної одиниці:

$i^3 =i^2 i= - 1i= -i$; $i^4 = i^3 i = -ii= 1$; $i^5=i^4 i=i$; $i^6=i^5 i=-1$; $i^7=i^6 i=-i$; $i^8=i^7 i=1$.

Оскільки $|i|=1$, то значення степенів періодично повторюються із збільшенням показника на 4. Так, $i^2= i =-1$, $i^3=i =-i$, $i^4=i = 1$і так далі.

<u>Означення.</u> Щоб піднести число до степеня з натуральним показником n, треба показник степеня поділити на 4 і піднести до степеня, показник якого дорівнює остачі від ділення.

Приклади. Піднести до степеня:

а) $i^{n+1}=i^1=i$;
б) $i^{n+2}= i^2= -1$;
в) $i^{n+3} =i^3 =-i$;
г) $i^{n+4}=i^n=i^4=1$.

Правила піднесення до степеня уявної одиниці застосовується при піднесенні до степеня комплексних чисел.

Приклади. Піднести до степеня двочлени:

1) $(2+5i)^2 = 4+20i +25i^2 = -21+20i$;
2) $(3+2)^3 = 27+54i +36i^2+8 = -9+36i$;
3) $(1+i)^2 = 1+2i + i^2= 2i$;
4) $(1-i)^2 = 1-2i + i^2= -2i$;
5) $(1-i) = (1-2i +i)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$;
6) $(1+i) = ((1+i)^2)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8 i$;
7) $(1-i) = ((1-i)^2) = (-2i) = -32i = -32i$.

Рівності$(1+i)^2 = 1+2i + i^2= 2i$, $(1-i)^2 = 1-2i + i^2= -2i$ корисно запам'ятати, бо їх часто використовують.

<u>§ 3. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ. ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ ТОЧКИ НА ПЛОЩИНІ.</u>

Вивчаючи комплексні числа, можна використовувати геометричну термінологію і геометричні міркування, якщо встановити взаємно однозначну відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини. Цю відповідність можна встановити так. Кожному комплексному числу $a+bi$ поставимо у відповідність точку $M(a;b)$ координатної площини, тобто точку, абсциса якої дорівнює дійсній частині комплексного числа, а ордината – коефіцієнту уявної частини. Кожній точці $M(a;b)$ координатної площини поставимо у відповідність комплексне число $a+bi$ (Рис. 1). Очевидно, що така відповідність є взаємно однозначною. Вона дає можливість інтерпретувати комплексні числа як точки деякої площини, на якій вибрано систему координат. Координатну площину називають при цьому *комплексною*, вісь абсцис – дійсною віссю, бо на ній розміщені точки, що відповідають комплексним числам $a+0i$, тобто відповідають дійсним числам. Вісь ординат називається *уявною віссю* – на ній лежать точки, які відповідають уявним комплексним числам $0+bi$.

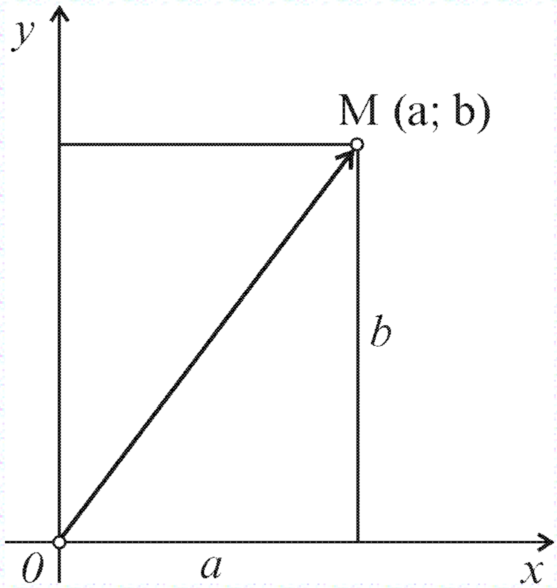


Рис. 1

Зручною є також інтерпретація комплексного числа як вектором $\overrightarrow{OM}$ (див. рис. 1). Поставимо у відповідність кожному комплексному числу вектор з початком у точці $O(0;0)$ і кінцем у точці $M(a;b)$. Ви знаєте, що такий вектор називають радіусом-вектором, а його проекції на осі координат є координатами вектора. Отже, можна сказати, що геометричним зображенням комплексного числа $z=a+bi$ є радіус-вектор з координатами a і b. Відповідність між множиною комплексних чисел, з одного боку, і множиною точок або векторів площини, з іншого, дає змогу комплексні числа називати точками або векторами і говорити, наприклад, про вектор $a+bi$ або про точку $a+bi$.

На рис. 2 вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ є відповідно геометричними зображеннями комплексних чисел $z_1 = 2+2i$; $z_2 = -3+4i$; $z_3 = -4-3i$; $z_4 = 4-2i$.

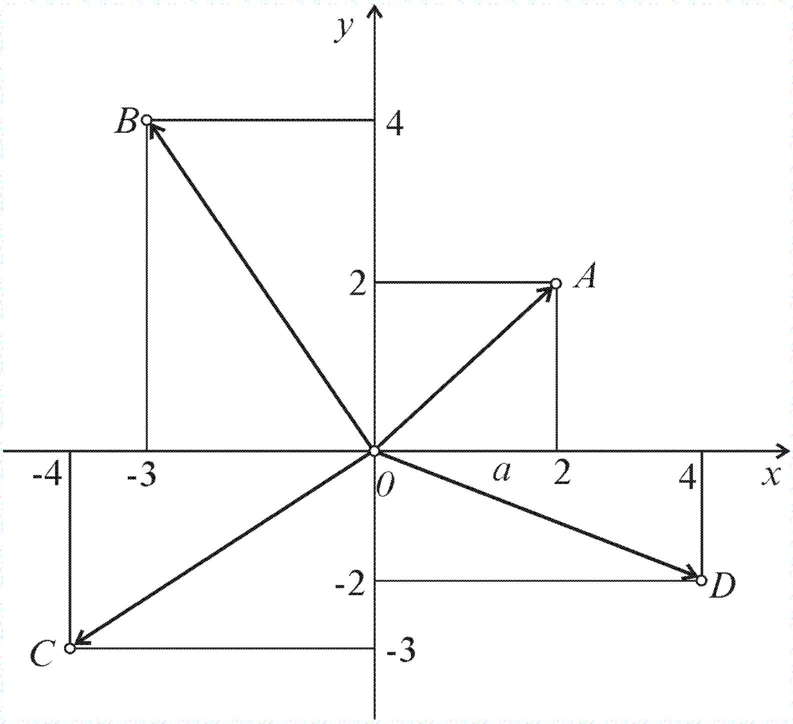


Рис. 2

Обидва способи геометричного зображення комплексних чисел рівноцінні, бо будь-якій точці *A* координатної площини відповідає певний радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$. Навпаки, кожному радіус-вектору $\overrightarrow{OA}$ відповідає певна точка – кінець радіуса-вектора.

Відстань r точки A від нульової точки, тобто число

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Називається *модулем* комплексного числа z і позначається символом IzI.

Число

$$\varphi = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{b}{a}\right), & \text{˙ęй î ő} > 0, \\ arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi, & \text{˙ęй î ő} < 0,\ y \geq 0, \\ arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi, & \text{˙ęй î ő} < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

називається *аргументом* комплексного числа z і позначається φ=arg z. При заданому r кути, що відрізняються на 2πn, n∈Z, відповідають одному й тому ж числу. В цьому випадку записують Arg z= arg z +2πn, n∈Z, arg z називають *головним значенням аргументую.*

Числа r і φ називають *полярними координатами* комплексного числа, при цьому

$$z = (a,b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

називається *тригонометричною формою* комплексного числа.

§ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА ЗАПИСУ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.

Запис числа Z у вигляді $a + bi$ називається *алгебраїчною формою запису комплексного числа*. Крім алгебраїчної форми використовуються й інші форми запису комплексних чисел – *тригонометрична і показникова.* Розглянемо тригонометричну форму запису, а для цього введемо поняття про модуль і аргумент комплексного числа.

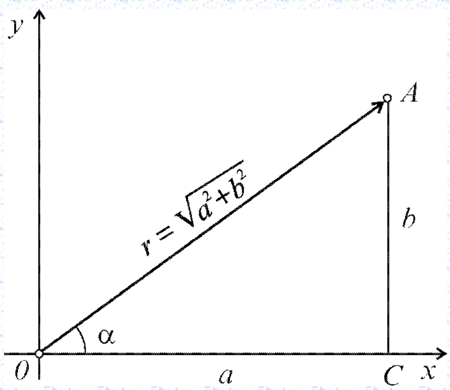


Рис. 3

Модуль комплексного числа. Побудуємо радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$, що є геометричним образом комплексного числа $z = a + bi$ (Рис. 3). Модулем комплексного числа $z = a + bi$ називається значення $\sqrt{a^2 + b^2}$. Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ перетворюється на нуль тільки за умов $a = 0,\ b = 0$.

Модуль комплексного числа $a + bi$ позначається символом $|a + bi|$. Отже, $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Якщо комплексні числа мають один і той самий модуль, то кінці векторів, які зображують ці числа, лежать на колі з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює їх модулю.

Приклади: знайти модулі даних комплексних чисел.

1) $|5+7i| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$;

2) $|-2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

3) $|8+0i| = \sqrt{64} = 8$;

4) 5í= 5.

Аргумент комплексного числа. Нехай радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$ зображує комплексне число $z = a + bi$ (див. рис. 3). Позначимо α кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OA}$ з додатним напрямом осі x. Числове значення кута a, виміряного в радіанах, називається аргументом комплексного числа $a + bi$. Якщо комплексне число дорівнює нулю, то вектор $\overrightarrow{OA}$ перетворюється в точку (нуль-вектор), і говорити про його напрям немає сенсу. Тому вважають, що число нуль не має аргументу. Кожне відмінне від нуля комплексне число має нескінченну множину значень аргументу, які відрізняються одне від одного на ціле число повних обертів, тобто на величину $2\pi n$, де n - довільне ціле число. Значення аргументу, взяте в межах першого кола, тобто від 0 до 2π, називається *головним*. Головне значення аргументу α комплексного числа $a + bi$ можна визначити в рівності $tg\alpha = \frac{b}{a}$. Справді, за знаками a і b можна встановити, в якій чверті міститься кут α, і за величиною $tg\alpha$, використовуючи таблиці, знайти величину кута α.

Приклади: знайти головне значення аргументу даних комплексних чисел.

1) z = 1+í;

Маємо: tg α = 1. Оскільки a = 1 та b = 1, радіус – вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить І чверті і тому α - гострий кут. Отже, = π/4.

2) $z = -2 + \sqrt{3}i$;

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$. Тут $a = -2$, $b = -\sqrt{3}$, тобто радіус – вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить II чверті. Отже, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

3) z = -1-ί;

Маємо: tg α = 1. Радіус – вектор, що відповідає даному комплексному числу, належить III чверті. Отже, α = $\frac{5\pi}{4}$.

4) $z = 1 - \sqrt{3}i$

Маємо: tg α = $-\sqrt{3}$. Тут a = 1, b = $-\sqrt{3}$. Радіус – вектор, що відповідає даному комплексному числу, належить IV чверті. Отже, $= \frac{5\pi}{3}$.

Тригонометрична форма комплексного числа. Нехай вектор $\overrightarrow{OA}$ є геометричним зображенням комплексного числа $z = a + bi$ (див. рис. 3), модуль якого дорівнює r, а аргумент αs.

У прямокутному трикутнику AOC: $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha s$. Підставляючи у запис комплексного числа замість a і b їхні значення, виражені через модуль і аргумент, дістанемо:

$$z = r\cos\alpha + r\sin\alpha i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Вираз $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *називається тригонометричною формою комплексного числа.* Будь-яке число $a + bi$, дане в алгебраїчній формі, можна подати в тригонометричній формі. Модуль r знаходимо за формулою $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут α визначаємо із залежності $tg\alpha = \frac{b}{a}$, яка випливає з формул $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ і

$\sin\alpha = \frac{b}{r}$.

Приклади:

а) $z = -1 - \sqrt{3}i$;

Маємо: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$; $tg\alpha = \sqrt{3}$; $\alpha = \frac{4\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Через те, що радіус – вектор, який зображує число z = a + bί, розміщений у III чверті комплексної площини, то за аргумент беремо $\alpha = \frac{4\pi}{3} + \pi n$. Î ňćĺ , $-1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

б) z = ί;

Тут a = 0, b = 1, отже, r = 1. Вектор, що зображує число ί, утворює з віссю абсцис кут $\frac{\pi}{2}$ (поясніть чому). Отже, ί = cos $\frac{\pi}{2}$ + ί sin $\frac{\pi}{2}$.

в) z = 3.

Тут a = 3, b = 0, отже, r = 3.

$$3 = 3(\cos 0 + i \sin 0).$$

Розглянемо приклади переходу від тригонометричної форми комплексного числа до алгебраїчної.

Приклади:

а) $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1+\sqrt{3}i$;

б) $4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2+2\sqrt{3}i$.

§ 5. ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ПЕРЕХІД ВІД АЛГЕБРАЇЧНОЇ ФОРМИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА ДО ПОКАЗНИКОВОЇ.

У різних розділах сучасної математики, а також в її застосуваннях (електротехніка, радіотехніка, гідравліка та ін.) вживається показникова форма комплексного числа. В основі показникової форми лежить формула Ейлера, яка встановлює зв'язок між тригонометричними функціями дійсного аргументу і показниковою функцією уявного аргументу.

Подаємо першу формулу Ейлера без виводу

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (1)$$

де число е, прийняте за основу натуральних логарифмів, ірраціональне (е ≈ 2,718; це число відіграє в математиці роль, не меншу, ніж число π).

Якщо у формулі z = r (cos φ + i sin φ) виконаємо заміну виразу cos φ + i sin φ на $e^{\varphi i}$, то дістанемо $z = re^{\varphi i}$. Це і є *показникова форма* комплексного числа z.

У цьому запису r — модуль комплексного числа, φ — аргумент комплексного числа z.

Замінимо в формулі Ейлера (1) φ на (—φ), дістанемо другу формулу Ейлера $e^{-\varphi i} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$,

або

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi \qquad (2)$$

Приклад 1. Подати в показниковій формі комплексне число z=3+4i

Модуль $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Знаходимо аргумент φ.

Оскільки $tg\varphi=\frac{4}{3},$ ň î $\varphi=arctg\frac{4}{3}\approx 0{,}93,\ 3+4i=5e^{0{,}93i}$.

Приклад 2.

Подати в показниковій формі комплексне число $z=\sqrt{3}-i$.

Знаходимо модуль: $|z|=\sqrt{3+1}=2$. Аргумент φ (головне значення) знайдемо із співвідношення $tg\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Отже, $\varphi=-\frac{\pi}{6};\ \sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Приклад 3.

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Приклад 4.

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{\pi i}.$$

З формул Ейлера

$$ĺ^{\varphi l}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$ĺ^{-\varphi l}=\cos\varphi-i\sin\varphi, \qquad (2)$$

можна дістати дуже важливі наслідки.

Додаючи почленно рівності (1) і (2), дістанемо $e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}=2\cos\varphi$, звідки

$$\cos\varphi=\frac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}}{2}. \qquad (3)$$

Почленно віднімаючи з рівності (1) рівність (2), маємо $e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}=2i\sin\varphi$, звідки

$$\sin\varphi=\frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i} \qquad (4)$$

Рівності (3) і (4) також називаються формулами Ейлера; вони виражають тригонометричні функції дійсного аргументу φ через показникові функції уявного аргументу. Формули (3) і (4) справедливі і тоді, коли φ замінюється будь-яким комплексним числом r така заміна дає:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \tag{5}$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \tag{6}$$

рівності (5) і (6) приймаються за означення косинуса і синуса комплексного аргументу.

§6. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ЗАДАНИМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ ТА ПОКАЗНИКОВІЙ ФОРМІ.

Множення і ділення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі.

Тригонометрична форма запису комплексних чисел виявляється дуже зручною під час множення і ділення чисел. Нехай $Z_1=r_1(\cos\alpha_1 + í \sin\alpha_1)$, $Z_2=r_2(\cos\alpha_2 + í \sin\alpha_2)$ – два числа, що записані в тригонометричній формі. Тоді

$Z_1 Z_2= r_1 r_2(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + í \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + í \sin\alpha_1 \cos\alpha_2)$, або $Z_1 Z_2= r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + í \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$.

Отже, справедливим є твердження: під час множення комплексних чисел у тригонометричній формі модулі їх перемножуються, а аргументи додаються.

Для знаходження частки множимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника:

$Z_1/Z_2=r_1(\cos\alpha_1 + í \sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 - í \sin\alpha_2)/ r_2(\cos\alpha_2 + í \sin\alpha_2)(\cos\alpha_2 - í \sin\alpha_2) = r_1/r_2 (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + í \sin(\alpha_1 - \alpha_2))\backslash(\cos^2\alpha_2 + í \sin^2\alpha_2)= r_1/r_2 (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + í \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$.

Отже, під час ділення комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються.

Приклади. Виконати множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі.

а) $Z_1=3(\cos 7° + í \sin 7°)$; $Z_2=8(\cos 15° + í \sin 15°)$;

д) Подаємо без доведення правила піднесення до степеня комплексного числа, записаного в тригонометричній формі.

При будь – якому натуральному n

$$(\cos\alpha + í \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + í \sin n\alpha.$$

Це твердження називається формулою Муавра.

Приклади. Виконати дії піднесення до степеня даного комплексного числа.

$z=\left(\sqrt{3}-i\right)^9$. Обчислити Z^9.

Модуль даного числа дорівнює $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=2$, аргумент α $=-\frac{\pi}{6}$, отже модуль числа Z дорівнює 2, аргумент 9α = $-\frac{9\pi}{6}=-\frac{3\pi}{2}$.

Таким чином,

$$z=\left(\sqrt{3}-1\right)^9=2^9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=512i.$$

є) добування кореня з комплексного числа.

Корінь n – го ступеня з числа Z=r(cos α + ί sin α) обчислюють за формулою

$$z_n=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)\right),$$

де к – деяке ціле число (к є Z).

Підставляючи замість к значення 0, 1, 2…n – 1, дістанемо n різних значень кореня. Так, якщо n = 2, к = 2 матимемо sin (α + 4 π)/2 = sin α/2 і так далі.

Приклади. Знайти всі значення $\sqrt[5]{1}$.

Оскільки 1 = 1(cos 0 + ί sin 0), то

$$\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{1}(\cos 0+i\sin 0)=1\left(\cos\frac{0+2\pi k}{5}+i\sin\frac{0+2\pi k}{5}\right),$$ к = 0, 1, 2, 3, 4.

Надаючи к послідовно значень 0, 1, 2, 3, 4, відповідно дістанемо:

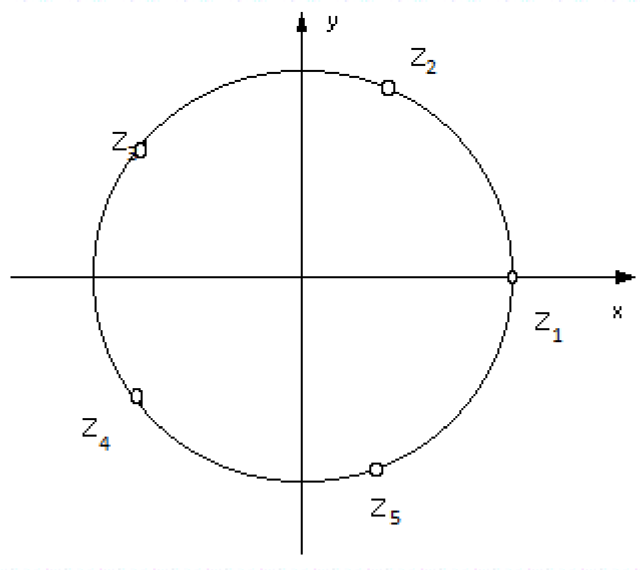
Z_1= 1, якщо к = 0;

$z_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, якщо к = 1;

$z_3=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$, якщо к = 2;

$z_4=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$, якщо к = 3;

$z_5=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$, якщо к = 4.



Цікавий такий факт. Модулі всіх цих значень $\sqrt[5]{1}$ дорівнюють 1. Отже, точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 лежать на колі радіуса 1 з центром у початку координат.

Побудувавши аргументи значень Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, помітимо, що точки, які зображують числа Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, є вершинами правильного п’ятикутника (рис.4).

Взагалі точки, які відповідають значенням кореня n – го ступеня з комплексного числа Z=r(cos α + í sin α), розміщуються у вершинах правильного n – кутника з центром у точці О.

Дії над комплексними числами заданими в показниковій формі виконуються за формулами:

1) $$r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

2) $$\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

3) $$\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi};$$

4) $$\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i}\quad (k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Приклад. Представивши числа $z_1=1+i$ і $z_2=1-i\sqrt{3}$ в показниковій формі, обчислити: 1) $z_1\cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^6; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

Запишемо число $z_1=1+i$ в показникові формі: $a=1, b=1,\ r=\sqrt{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}$, тоді $z_1=\sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}}$.

$$z_2=1-i\sqrt{3}: a=1, b=-\sqrt{3},\qquad r=2,\qquad \varphi=-\frac{\pi}{3},$$

$$\text{тоді } z_2=2\ e^{-\frac{\pi}{3}}.$$

1) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot 2e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{12}}.$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}-\left(-\frac{i\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}.$

3) $z_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^6 = 8e^{\frac{i3\pi}{2}}.$

4) $z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)i/4}, k = 0,1,2,3;$

$k = 0, \qquad z_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{i\pi}{16}};$

$k = 1, \qquad z_1 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}};$

$k = 2, \qquad z_2 = \sqrt[8]{2}e^{-\frac{15\pi i}{16}};$

$k = 3, \qquad z_3 = \sqrt[8]{2}e^{-\frac{7\pi i}{16}}.$